2.2 ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ισοδύναμα κλάσματα : Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

2.

Έλεγχος της ισοδυναμίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα όταν τα «χιαστί» γινόμενα αδ και βγ είναι ίσα .

Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ όταν $\alpha\delta = \beta\gamma$.

3.

Δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων

Αν **πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, προκύπτει κλάσμα **ισοδύναμο** με το αρχικό

4.

Απλοποίηση κλάσματος : Είναι η διαδικασία με την βοήθεια της οποίας βρίσκουμε κλάσμα ισοδύναμο με κάποιο άλλο, αλλά με μικρότερους όρους

5.

Ανάγωγο κλάσμα : Είναι το κλάσμα που δεν απλοποιείται.
Σε αυτή την περίπτωση ο ΜΚΔ των όρων του είναι το 1

6.

Ομώνυμα – ετερώνυμα κλάσματα :

Ομώνυμα κλάσματα είναι αυτά που έχουν τον ίδιο παρονομαστή
Ετερώνυμα κλάσματα είναι αυτά που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Απλοποίηση κλάσματος : Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα, ώστε αυτό να γίνει **ανάγωγο,** διαιρούμε τους όρους του με τον ΜΚΔ αυτών

2.

Κάτι που βολεύει : Όταν θέλουμε να μετατρέψουμε κλάσματα σε ομώνυμα , πρώτα τα απλοποιούμε αν βέβαια απλοποιούνται και μετά προχωράμε στη μετατροπή

3.

Για τον έλεγχο της ισοδυναμίας : Αν, μετατρέποντας κλάσματα σε ομώνυμα, αυτά έχουν ίσους αριθμητές, τότε είναι ισοδύναμα, ειδάλλως όχι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Το κλάσμα $\frac{3}{5}$ είναι ανάγωγο Σ

β) Δύο ή περισσότερα κλάσματα με διαφορετικό παρονομαστή τα λέμε ομώνυμα Λ

γ) Αν είναι $\alpha\beta = \gamma\delta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta}{\beta}$ Σ

δ) Τα κλάσματα $\frac{2}{3}$ και $\frac{12}{18}$ είναι ισοδύναμα Σ

ε) $\frac{\alpha \cdot \kappa}{\beta : \kappa} = \frac{\alpha}{\beta}$ Λ

στ) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha + 3}{\beta + 3}$ Λ

Προτεινόμενη λύση

α) Ναι, διότι ΜΚΔ(3 , 5) = 1 Πρόταση σωστή

β) Πρόταση λάθος

γ) Πρόταση σωστή

δ) Αφού $2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 36$, τα κλάσματα ίσα ισοδύναμα. Πρόταση σωστή

ε) Όχι διότι δεν έχουμε πολλαπλασιασμό στον παρανομαστή ή διαίρεση στον αριθμητή. Πρόταση λάθος

στ) Όχι , δεν υπάρχει τέτοια ιδιότητα. Πρόταση λάθος

2.

Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, ποια ισότητα συνδέει τα α, β, γ και δ ;

Δώστε ένα δικό σας παράδειγμα

Προτεινόμενη λύση

Τα συνδέει η ισότητα $\alpha\delta = \beta\gamma$

Παράδειγμα : $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$ άρα $3 \cdot 30 = 5 \cdot 18$ δηλαδή $90 = 90$

3.

Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{32}{50}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{15}{500}$, $\frac{50}{250}$

σε ισοδύναμα με παρονομαστή το 100

Προτεινόμενη λύση

Διαιρώντας το 100 με το 5 βρίσκουμε 100 : 5 = 20 οπότε

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$ ομοίως $\frac{12}{20} = \frac{12 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{60}{100}$,

$\frac{32}{50} = \frac{32 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{64}{100}$ $\frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{175}{100}$

Στο κλάσμα $\frac{10}{8}$, επειδή η διαίρεση 100: 8 δεν είναι τέλεια, εργαζόμαστε ως εξής

$$\frac{10}{8} = \frac{10:2}{8:2} = \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{125}{100}$$

$$\frac{15}{500} = \frac{15:5}{500:5} = \frac{3}{100}$$

$$\frac{50}{250} = \frac{50:5}{250:5} = \frac{10}{50} = \frac{10 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{20}{100}$$

4.

Απλοποιήστε τα κλάσματα ώστε αυτά να γίνουν ανάγωγα

$\frac{68}{74}$, $\frac{102}{17}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{225}{315}$, $\frac{144}{96}$

Προτεινόμενη λύση

Βρίσκουμε τον ΜΚΔ των 68 και 74
Αναλύοντας αυτούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε ότι
$68 = 2^2 \cdot 17$ και $74 = 2 \cdot 37$ επομένως ΜΚΔ(68 , 74) = 2 οπότε

$$\frac{68}{74} = \frac{68:2}{74:2} = \frac{34}{37}$$

Ομοίως
$102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ και $17 = 1 \cdot 17$ άρα ΜΚΔ(102, 17) = 1.

Άρα το κλάσμα $\frac{102}{17}$ είναι ανάγωγο

$60 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5$, $84 = 3 \cdot 2^2 \cdot 7$ άρα ΜΚΔ(60, 84) = $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

Οπότε $\frac{60}{84} = \frac{60:12}{84:12} = \frac{5}{7}$

$225 = 3^2 \cdot 5^2$, $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ άρα ΜΚΔ(225, 315) = $5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$

Οπότε $\frac{225}{315} = \frac{225:45}{315:45} = \frac{5}{7}$

$144 = 2^4 \cdot 3^2$, $96 = 2^5 \cdot 3$ άρα ΜΚΔ(144, 96) = $2^4 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$

Οπότε $\frac{144}{96} = \frac{144:48}{96:48} = \frac{3}{2}$

5.

Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά ώστε τα κλάσματα να είναι ομώνυμα .
Ποια από αυτά είναι ανάγωγα ;

$\frac{5}{7+8}$, $\frac{18}{16-..}$, $\frac{3\ +1}{29-...}$, $\frac{5-2}{25-...}$, $\frac{4}{30:...}$

Προτεινόμενη λύση

αφού $\frac{5}{7+8} = \frac{5}{15}$ και στα υπόλοιπα κλάσματα θα πρέπει παρονομαστής να είναι το 15

Οπότε $\frac{18}{16-..} = \frac{18}{16-1} = \frac{18}{15}$

Ομοίως $\frac{3\ +1}{29-...} = \frac{4}{29-14} = \frac{4}{15}$

$\frac{5-2}{25-...} = \frac{3}{25-10} = \frac{3}{15}$

$\frac{4}{30:2} = \frac{4}{15}$

Ανάγωγο είναι μόνο το $\frac{4}{15}$

Παρατήρηση : Θα μπορούσαμε το αρχικό κλάσμα $\frac{5}{7+8} = \frac{5}{15}$ να το απλοποιήσουμε , αφού $\frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3}$ και να κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα με παρονομαστή το 3

6.

Εξετάστε ποια από τα παρακάτω ζεύγη κλασμάτων είναι ισοδύναμα

α) $\frac{11}{9}$ και $\frac{110}{91}$ **β)** $\frac{47}{36}$ και $\frac{64}{69}$ **γ)** $\frac{100}{580}$ και $\frac{10}{58}$ **δ)** $\frac{84}{97}$ και $\frac{1176}{1358}$

Προτεινόμενη λύση

Εξετάζουμε τα «χιαστί» γινόμενα

α)
$11{\cdot}91 = 1001$ και $9{\cdot}91 = 990$ με $1001 \neq 990$. Δεν είναι ισοδύναμα

β)
$47{\cdot}69 = 3243$ και $36{\cdot}64 = 2304$ με $3243 \neq 2304$. Δεν είναι ισοδύναμα

γ)
$100{\cdot}58 = 5800$ και $580{\cdot}10 = 5800$ με $5800 = 5800$ Είναι ισοδύναμα

δ)
$84{\cdot}1358 = 114072$ και $97{\cdot}1176 = 114072$ με $114072 = 114072$ Είναι ισοδύναμα

Παρατήρηση : στα δύο τελευταία κλάσματα θα μπορούσαμε να απλοποιήσουμε ως εξής $\frac{100}{580} = \frac{100:10}{580:10} = \frac{10}{58}$ και $\frac{1176}{1358} = \frac{1176:14}{1358:14} = \frac{84}{97}$

7.

Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{3}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή α) 24 , β) 30, γ) 51

και το κλάσμα $\frac{2}{15}$ σε ισοδύναμο με παρονομαστή α)75, β) 105, γ)135

Προτεινόμενη λύση

Επειδή 24 : 3 = 8 έχουμε ότι $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{16}{24}$

30 : 3 = 10 έχουμε ότι $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}=\frac{20}{30}$

51 :3 = 17 έχουμε ότι $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 17}{3\cdot 17}=\frac{34}{51}$

Επειδή 75 : 15 = 5 έχουμε ότι $\frac{2}{15}=\frac{2\cdot 5}{15\cdot 5}=\frac{10}{75}$

105 : 15 = 7 έχουμε ότι $\frac{2}{15}=\frac{2\cdot 7}{15\cdot 7}=\frac{14}{105}$

135 :15 = 9 έχουμε ότι $\frac{2}{15}=\frac{2\cdot 9}{15\cdot 9}=\frac{18}{135}$

8.

Αν ένα κλάσμα έχει παρονομαστή το 3, μπορεί αυτό να μετατραπεί σε ισοδύναμο με παρονομαστή α) 1521 β) 1024 ; Δικαιολογήστε την απάντηση σας

Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή 1521= 3·507, η μετατροπή επιτυγχάνεται αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους του κλάσματος με το 507

β)

Όχι , αφού το 1024 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3

9.

Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα

α) $\frac{5}{9}$ και $\frac{3}{100}$ **β)** $\frac{9}{11}$ και $\frac{7}{6}$ **γ)** $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ και $\frac{11}{24}$ **δ)** $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{21}{15}$ και $\frac{17}{30}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\frac{5}{9}$ και $\frac{3}{100}$ ΕΚΠ(9 , 100) = 900

Διαιρούμε το ΕΚΠ με κάθε παρονομαστή

900:9 = 100 και 900:100 = 9

Οπότε $\frac{5}{9} = \frac{5\cdot100}{9\cdot100} = \frac{500}{900}$ και $\frac{3}{100} = \frac{3\cdot9}{100\cdot9} = \frac{27}{900}$

β)

$\frac{9}{11}$ και $\frac{7}{6}$ ΕΚΠ(11 , 6) = 66

66: 11= 6 και 66: 6 = 11

Οπότε $\frac{9}{11} = \frac{9\cdot6}{11\cdot6} = \frac{54}{66}$ και $\frac{7}{6} = \frac{7\cdot11}{6\cdot11} = \frac{77}{66}$

γ)

$\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ και $\frac{11}{24}$ ΕΚΠ(12, 18, 24) = 72

72:12 = 6 , 72: 18 = 4 , 72 : 24 = 3

Οπότε $\frac{5}{12} = \frac{5\cdot6}{12\cdot6} = \frac{30}{72}$, $\frac{7}{18} = \frac{7\cdot4}{18\cdot4} = \frac{28}{72}$ και $\frac{11}{24} = \frac{11\cdot3}{24\cdot3} = \frac{33}{72}$

δ)

$\frac{7}{5}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{21}{15}$ και $\frac{17}{30}$

εδώ μας «συμφέρει» πρώτα να απλοποιήσουμε τα κλάσματα $\frac{9}{12}$ και $\frac{21}{15}$

έτσι $\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$, $\frac{21}{15} = \frac{21:3}{15:3} = \frac{7}{5}$ τα αρχικά κλάσματα γίνονται

$\frac{7}{5}$, $\frac{3}{4}$ και $\frac{17}{30}$ με ΕΚΠ(5, 4, 30) = 60

Και βρίσκουμε ότι $\frac{7}{5} = \frac{84}{60}$, $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ και $\frac{17}{30} = \frac{34}{60}$

10.

Να βρείτε τις τιμές των α , β και γ έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες

α) $\frac{\alpha}{8} = \frac{21}{2}$ **β)** $\frac{27}{4} = \frac{108}{\beta}$ **γ)** $\frac{\gamma + 4}{6} = \frac{5418}{18}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\frac{\alpha}{8} = \frac{21}{2}$ άρα $2 \cdot \alpha = 8 \cdot 21$

$2\alpha = 168$

$\alpha = 168 : 2 = 84$

β)

$\frac{27}{4} = \frac{108}{\beta}$ άρα $27 \cdot \beta = 4 \cdot 108$

$27\beta = 432$

$\beta = 432 : 27 = 16$

γ)

επειδή $5418:18 = 301$ η ισότητα γράφεται $\frac{\gamma + 4}{6} = 301$ άρα $\gamma + 4 = 6 \cdot 301$

$\gamma + 4 = 1806$

$\gamma = 1806 - 4$

$\gamma = 1802$

11.

Στην τριάδα των κλασμάτων $\frac{12}{48}$, $\frac{14}{52}$, $\frac{3}{12}$ υπάρχουν μεταξύ τους ισοδύναμα ;

Προτεινόμενη λύση

Απλοποιούμε τα κλάσματα

$\frac{12}{48} = \frac{12:12}{48:12} = \frac{1}{4}$, $\frac{14}{52} = \frac{14:2}{52:2} = \frac{7}{26}$, $\frac{3}{12} = \frac{3:3}{12:3} = \frac{1}{4}$

Βλέπουμε ότι το πρώτο κλάσμα είναι ισοδύναμο με το τρίτο

12.

Δύο κινηματογράφοι έχουν τον ίδιο αριθμό θέσεων. Ένα βράδυ, ο ένας είχε πληρότητα $\frac{28}{32}$ και ο άλλος $\frac{98}{112}$. Είχαν τον ίδιο αριθμό θεατών ;

Προτεινόμενη λύση

Απλοποιούμε τα κλάσματα

$\frac{28}{32} = \frac{28:4}{32:4} = \frac{7}{8}$ και $\frac{98}{112} = \frac{98:14}{112:14} = \frac{7}{8}$

Επομένως είχαν τον ίδιο αριθμό θεατών